

一类非标准增长泛函极小的 $C^{1,\alpha}$ 正则性

梁 鉴 廷

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要 考虑一类积分泛函, 它的被积函数依赖于 u 的梯度和参数 ϵ , 并且满足某种非标准增长条件. 本文证明该泛函的极小在所考虑区域 G 内局部有界; 如果极小函数满足适当的限制条件, 那么它在 G 内有局部 Hölder 连续的一阶梯度, 并且在 G 的任何紧子集上, 极小函数的梯度的 Hölder 系数和 Hölder 指数与极小函数 u 以及参数 ϵ 无关.

关键词 积分泛函, 非标准增长条件, 极小, 处处 $C^{1,\alpha}$ 正则性

分类号 O175.25

关于非标准增长泛函极小和非标准增长椭圆方程解性质的研究在近 10 年来有了很大的发展, 但是关于解的 $C^{1,\alpha}$ 正则性研究, 迄今几乎是空白. Choe^[1] 考虑过下面的泛函:

$$I(u) = \int_G f(\nabla u) dx \quad (1)$$

$$f(\xi) = (\epsilon + |\xi|^2)^k \ln(1 + |\xi|^2), \quad \epsilon \in (0, 1), k > \frac{1}{2} \quad (2)$$

其中, G 是 n 维欧氏空间 E^n 中的有界区域, 在假定

$$0 \leq f(\xi) \leq C(1 + |\xi|^p), \quad p > 1 \quad (3)$$

$$k_0 \lambda(|\xi|^2) |\zeta|^2 \leq f_{\xi_i \xi_j}(\xi) \zeta_i \zeta_j \leq k_1 \lambda(|\xi|^2) |\zeta|^2, \quad k_1 \geq k_0 > 0 \quad (4)$$

以及假定(1)的极小 $u \in W^{1,p}(G)$ 的前提下, 得到了 $\lambda(|\nabla u|^2) |\nabla u| |\nabla u|$ 在 G 内的局部 Hölder 连续性. 但是由于 $\lambda(t)$ 可能有的蜕化性和奇异性, Choe 的结果并不能保证 u 的 $C^{1,\alpha}$ 正则性. 此外, [1] 中把结果应用于由(1), (2)决定的泛函的极小时, $u \in W^{1,p}(G)$ (p 为(3)中的常数)的前提条件并未得到验证. 现在我们要证明(1), (2)的极小在 G 内有 Hölder 连续的一阶梯度.

当 $f(\xi)$ 由(2)给出时, 直接计算给出

$$\begin{aligned} f_{\xi_i \xi_j}(\xi) \zeta_i \zeta_j &= 2[k(\epsilon + t)^{k-1} \ln(1+t) + \frac{(\epsilon + t)^k}{1+t}] |\zeta|^2 \\ &+ 4(\xi_i \zeta_i)^2 [k(k-1) \cdot (\epsilon + t)^{k-2} \ln(1+t) + \frac{(\epsilon + t)^{k-1}}{(1+t)^2} (2k - \epsilon + (2k-1)t)] \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $t = |\xi|^2$. 简记

收稿日期: 1994-10-12

$$\lambda(t) = (\epsilon + t)^{k-1} \ln(1+t) + \frac{(\epsilon + t)^k}{1+t} \quad (6)$$

那么, 根据(5)以及 $\epsilon \in (0, 1)$, $k > \frac{1}{2}$, 即见(4)成立, 并且相应地 $k_0 = \min\{2k-1, 1\} > 0$, $k_1 = \max\{2k(2k-1), 2+8k\}$, 此外, 容易验证存在常数 $C > 1$, 使

$$C^{-1}t\lambda(t) \leq f(t) \quad (t = |\xi|^2) \quad (7)$$

$$|\lambda'(t)|t \leq C\lambda(t) \quad (8)$$

$$C^{-1}\sqrt{t\lambda(t)} \leq \int_0^t \sqrt{\frac{\lambda(s)}{s}} ds \leq C\sqrt{t\lambda(t)} \quad (9)$$

记 $B(r) = \{|x| < r\}$. 本文结果叙述为:

定理 1 设 u 是泛函(1), (2)的极小, 那么对任何 $B(3r) \subset G$, 成立

$$\operatorname{vrai} \max_{B(r)} \lambda(|\nabla u|^2) |\nabla u|^2 \leq C \int_{B(2r)} \lambda(|\nabla u|^2) |\nabla u|^2 dx \quad (10)$$

其中, 常数 $C > 0$ 和 ϵ, r 无关; $\int_e w dx$ 记函数 w 在集合 e 上的积分平均值.

定理 2 设 u 是泛函(1), (2)的极小, 此外设 u 满足约束条件:

$$\int_G (1 + |\nabla u|^2)^k \ln(1 + |\nabla u|^2) dx \leq K < +\infty \quad (11)$$

那么在 G 内 u 有局部 Hölder 连续的一阶梯度, 更确切地, 对任何 $B(2r) \subset G$, 成立

$$|\nabla u(x) - \nabla u(y)| \leq C(K, r) |x - y|^\alpha, \quad x, y \in B(\frac{r}{2}) \quad (12)$$

其中, 常数 $C > 0$, $\alpha \in (0, 1)$ 和 ϵ, u 无关.

下面先利用定理 1 的结果来证明定理 2, 然后再完成定理 1 的证明.

定理 2 的证明 根据(8), (10) 和(11), u 作为(1), (2)的极小满足

$$\operatorname{vrai} \max_{B(r)} \frac{|\nabla u|^{2(k+1)}}{1 + |\nabla u|^2} \leq \operatorname{vrai} \max_{B(r)} \lambda(|\nabla u|^2) |\nabla u|^2 \leq \frac{CK}{r^n}$$

上式隐含了 ∇u 在 G 内局部有界, 并且界和 ϵ, u 无关. 因为我们只是考虑解的局部性质, 不失一般性, 设 ∇u 在 G 一致有界, 而且界和 ϵ 无关. 根据(6)成立

$$\frac{(\epsilon + |\nabla u|^2)^k}{1 + \operatorname{vrai} \max_G |\nabla u|^2} \leq \lambda(|\nabla u|^2) \leq C(\epsilon + |\nabla u|^2)^k$$

(4), (11) 分别写为

$$K_3(\epsilon + |\xi|^2)^k |\zeta|^2 \leq f_{\epsilon, \xi}(\xi) \leq k_3(\epsilon + |\xi|^2)^k |\zeta|^2$$

$$\int_G |\nabla u|^{2(k+1)} dx < +\infty$$

然后定理 2 的断言由周知的椭圆方程理论给出.

定理 1 的证明 设 u 是定理 1 中出现的函数, 根据(7), u 满足 $\int_G \lambda(|\nabla u|^2) |\nabla u|^2 dx < +\infty$ 和满足 Euler 方程:

$$\int_G \varphi_{x_i} f_{\xi_i}(\nabla u) dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^1(G)$$

用 φ_{x_i} 取代 φ , 经过分部积分由上式即得

$$\int_G \varphi_{x_i} f_{\xi_i}(\nabla u) u_{x_i x_j} dx = 0, \quad \forall \varphi \in (C_c^1(G)) \quad (13)$$

用 φ_{x_i} 取代 φ , 利用(13) 并对 k 由 1 到 n 求和, 继续得

$$\int_G \{ \varphi_{x_i} f_{\xi_i \xi_j}(\nabla u) u_{x_k} u_{x_k x_j} + \varphi f_{\xi_i \xi_j}(\nabla u) u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} \} dx = 0 \quad (14)$$

$$\forall \varphi \in C_c^1(G)$$

设 $\zeta(x) = \zeta(|x|)$ 是 $|x|$ 的 C^1 类函数, 满足

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } |x| \leq r \\ 0 & \text{当 } |x| \geq 2r \end{cases} \quad |\nabla \zeta(x)| \leq 4/r$$

在(14)中用 ζ^2 代 φ , 得

$$\int_{B(r)} f_{\xi_i \xi_j}(\nabla u) u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} dx \leq C \int_{B(2r)} f_{\xi_i \xi_j}(\nabla u) (\zeta_{x_i} u_{x_k}) (\zeta_{x_j} u_{x_k});$$

$$\int_{B(r)} \lambda(|\nabla u|^2) |\nabla^2 u|^2 dx \leq \frac{C}{r^2} \int_{B(2r)} \lambda(|\nabla u|^2) |\nabla^2 u|^2 dx \quad (15)$$

由于(8)成立

$$|\nabla(\sqrt{\lambda(|\nabla u|^2)} |\nabla u|)| \leq C \sqrt{\lambda(|\nabla u|^2)} |\nabla^2 u| \quad (16)$$

(15) 隐含 $\sqrt{\lambda(|\nabla u|^2)} |\nabla u| \in W_{loc}^{1,2}(G)$. 取 $\varphi = \zeta^2 \nu^\gamma u_{x_k}$, $\nu = \int_0^{|\nabla u|^2} \sqrt{\frac{\lambda(s)}{s}} ds$

将 φ 代入(13)并对 k 由 1 到 n 求和, 即得

$$0 = \int_{B(2r)} \zeta^2 \nu^\gamma f_{\xi_i \xi_j}(\nabla u) u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} dx + \gamma \int_{B(2r)} \zeta^2 \nu^{\gamma-1} \nu_{x_i} u_{x_k} f_{\xi_i \xi_j}(\nabla u) u_{x_k x_j} dx$$

$$+ 2 \int_{B(2r)} \zeta \zeta_{x_i} \nu^\gamma u_{x_k} f_{\xi_i \xi_j}(\nabla u) u_{x_k x_j} dx$$

$$= \text{I} + \text{II} + \text{III}$$

根据 ν 的定义, 有 $|\nabla \nu|^2 \leq \lambda(|\nabla u|^2) |\nabla^2 u|^2$,

从而

$$\text{I} \geq \int_{B(2r)} \zeta^2 \nu^\gamma \lambda(|\nabla u|^2) |\nabla^2 u|^2 dx$$

$$\geq C \int_{B(2r)} \zeta^2 \nu^\gamma |\nabla \nu|^2 dx$$

$$= C \left(\frac{\gamma}{2} + 1 \right)^{-2} \int_{B(2r)} \zeta^2 |\nabla(\nu^{\frac{\gamma}{2}+1})|^2 dx$$

其中, 常数 $C > 0$ 和 γ, r 无关. 考虑到(4), 成立 $\nu_{x_i} f_{\xi_i \xi_j}(\nabla u) u_{x_k} u_{x_k x_j} \geq 0$, 从而 $\gamma \geq 0$ 时,

$\text{II} \geq 0$. 至于 III , 我们有

$$|\text{III}| \leq C \left(\int_{B(2r)} \zeta^2 \nu^\gamma \lambda(|\nabla u|^2) |\nabla^2 u|^2 dx \int_{B(2r)} |\nabla \zeta|^2 \nu^\gamma \lambda(|\nabla u|^2) |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}$$

联合以上结果, 即得

$$\int_{B(2r)} \zeta^2 |\nabla \nu^{\frac{\gamma}{2}+1}|^2 dx \leq \frac{C(\frac{\gamma}{2} + 1)^2}{r^2} \int_{B(2r)} \nu^\gamma \lambda(|\nabla u|^2) |\nabla u|^2 dx \quad (17)$$

根据 Соболев 嵌入定理, 由(17)和(9)继续得

$$\left(\int_{B(r)} \nu^{(\gamma+2)\frac{n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C(n) \int_{B(2r)} |\nabla(\zeta \nu^{\frac{\gamma}{2}+1})|^2 dx$$

$$\leq \frac{C(\frac{\gamma}{2} + 1)^2}{r^2} \int_{B(2r)} \nu^{(\gamma+2)} dx \quad (18)$$

利用(18)和标准的 Moser 迭代, 即得

$$\text{vrai max}_{B(r)} \nu \leq C \int_{B(2r)} \nu dx \quad (19)$$

其中的常数 $C > 0$ 和 ϵ, r 无关. 联合(9) 和(19) 给出(10), 定理 1 证讫.

参 考 文 献

- 1 Choe H J. Regularity for minimizers of certain degenerate functionals with nonstandard growth conditions, Comm P D E, 1991, 16:363 ~ 372

$C^{1,\alpha}$ Regularity for Minimizers of a Functional with Nonstandard Growth Conditions

*Liang Xiting**

Abstract Consider on G an integral functional of which the integrand depends on the gradient of u and on a parameter ϵ and satisfies certain nonstandard growth conditions. The local boundedness of the minimizer of the functional is proved. Furthermore, if the minimizer, u , satisfies suitable restrictive conditions, then it has locally Hölder continuous first gradient; and on any compact subset of G the Hölder coefficient and the Hölder exponent of the gradient of the minimizer are independent of u and ϵ , the minimizer and the parameter, respectively.

Keywords integral functional, nonstandard growth condition, minimizer, everywhere $C^{1,\alpha}$ regularity

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275